Ο νέος τρόπος διδασκαλίας της Γεωμετρίας και τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά.

Πλατάρος Ιωάννης.
Εκπαιδευτικός Π.Ε.03
Μ.Δ.Ε. «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
plataros@gmail.com

Περίληψη

Τα δυναμικά Γεωμετρικά λογισμικά, παρ᾽ ότι νέα, έχουν αρχαία καταγωγή ως προς τον έλεγχο εικασιών, ισχυροποίηση υποθέσεων και ανακάλυψη προτάσεων και θεωρημάτων, παρ᾽ ότι αυτό επιμελώς «αποκρύπτεται» από την επίσημη μαθηματική βιβλιογραφία. Άρα ο ρόλος τους στην επανανακάλυψη της γνώσης (αλλά και της προαγωγής της) όπως απαιτούν οι νέες διδακτικές προσεγγίσεις είναι εκ των ών ουκ άνευ. Με τα δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα που παρουσιάζονται, όπως και με την ειδική προσέγγισή τους μέσω των δυνατοτήτων του δυναμικού λογισμικού, διαφαίνεται η αναγκαιότητα πλήρους διδακτικής τους εκμετάλλευσης, η οποία προϋποθέτει και μια προσαρμογή του Α.Π.Σ. για την Γεωμετρία.

Λέξεις-Κλειδιά: Sketchpad, δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά, ανακαλυπτική μάθηση,

Εισαγωγή

Υπάρχουν κάποιοι απλουστευμένοι αφορισμοί, πλην όχι ιδεολογικά αδιάφοροι για το τι είναι Μαθηματικά. λ.χ. «Μαθηματικά=Απεικονίσεις» ή «Μαθηματικά=Απόδειξη» (Hearsh,1997) που κατά καιρούς λέγονται και ακούγονται μεταξύ των Μαθηματικών ως πορίσματα προσωπικής εμπειρίας. Ωστόσο, η ενεργός εξελισσόμενη ουσία των Μαθηματικών είναι η ίδια *η Μαθηματική Ανακάλυψη*, για την ουσία της οποίας δεν υπάρχει κάποιος γνωστός αφορισμός. Με δεδομένη την σύγχρονη τάση της Παιδαγωγικής που αφορά στην *«Ανακαλυπτική Μάθηση»* και με δεδομένα τα σύγχρονα υπάρχοντα εκπαιδευτικά εργαλεία, δηλ. εκπαιδευτικά λογισμικά που ευνοούν τον σχηματισμό ισχυρών εικασιών και υποθέσεων, για την ανακάλυψη μαθηματικών προτάσεων και την εν συνεχεία απόδειξή τους, δημιουργείται η κατ᾽ αρχήν εύλογη απορία γιατί δεν έχουν εισαχθεί αυτονοήτως σε Πανελλήνια καθολική καθημερινή μαθησιακή διαδικασία τάξης, παρά τις προσπάθειες που έχουν γίνει στα ηλεκτρονικά βιβλία με την προσθήκη εφαρμογίδιων και

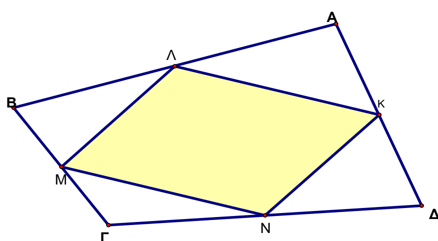
«μικροπειραμάτων» . Η ισχυρή μαθηματική παράδοση του Ευκλείδη που συστηματοποίησε και ταξινόμησε την έως τότε μαθηματική ανακάλυψη με θαυμαστό, πρωτοποριακό, αυστηρό και απόλυτα λογικό τρόπο, έδρασε καταλυτικά και έκτοτε κατέστη παγκόσμιο μαθηματικό υπόδειγμα- πρότυπο μαθηματικής διάρθρωσης –παρουσίασης μιας μαθηματικής θεωρίας. Αποτέλεσμα αυτού ήταν να αποκρύβεται επιμελέστατα ο πειραματικός και ο ενίοτε «δια μηχανικών μεθόδων» τρόπος μαθηματικής έρευνας για την ανακάλυψη των προτάσεων, πράγμα που αποτελεί δεσπόζον υπόδειγμα και για σήμερα. Τα νέα Γεωμετρικά εκπαιδευτικά λογισμικά, εισάγουν ολιστικές προσεγγίσεις για τα μαθηματικά, καθώς προσφέρουν πειραματισμό για εξαγωγή και ισχυροποίηση εικασιών, δυνατότητα χιλιάδων παρατηρήσεων καθώς ένα σχήμα μεταβάλλεται δυναμικά και πλέον η παρατήρηση-εικασία είναι ισοπόσως ισχυρή και άρα εδραία. Παράλληλα, ο πειραματισμός, δίνει την ευκαιρία να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι εργασίας που χρησιμοποιούν οι πειραματικές επιστήμες ως προς την εξαγωγή των μαθηματικών τους συμπερασμάτων, όχι όμως και τα ίδια τα μαθηματικά για τον εαυτό τους (!) αφού τα όποια «μαθηματικά για τα μαθηματικά» παρουσιάζονται στην τελική τους μορφή ως «πρόταση-απόδειξη» χωρίς τίποτα να προηγείται της «πρότασης» Παραλλήλως, αυτά τα Γεωμετρικά εργαλεία εισάγουν φυσικούς τρόπους σύνδεσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την Ανάλυση, την Άλγεβρα και την Φυσική, πράγματα σπουδαία διδακτικώς για την ορθή αντίληψη-μοντέλο των μαθητών γι αυτούς τους σπουδαίους τομείς του επιστητού. Στην παρούσα εργασία, θα παρουσιάσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα που επαληθεύουν τα προηγουμένως ισχυριζόμενα.

Η διερευνητικές και ανακαλυπτικές δυνατότητες ενός δυναμικού Γεωμετρικού Εργαλείου, (λ.χ. του Sketchpad)

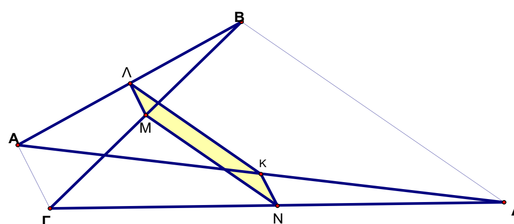
Μια γνωστή πρόταση, λέει, *ότι «τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου, είναι κορυφές παραλληλογράμμου».* Την επιλέγουμε επίτηδες, αφού είναι πολύ γνωστή και απλή και δεν προοιωνίζεται κάτι αρκετά γόνιμο από την μελέτη της. Μια δυνητική διατύπωση, μπορεί να την κάνει «ανοικτής διατύπωσης» και να έχουμε μια εκφώνηση του τύπου *«Να μελετήσετε τι σχήμα ορίζουν τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου. Να το αποδείξετε και να διερευνήσετε ειδικές περιπτώσεις ανακαλύπτοντάς τες, διατυπώνοντάς τες και αποδεικνύοντάς τες.»* Αυτό βεβαίως θέλει όπως θα δούμε παραπάνω χρόνο, θέλει «συνέχεια διερεύνησης κατ᾽οίκον» υπό τύπον μικρής εργασίας, όμως η χαρά της ανακάλυψης (ενδεχόμενης, πλην πιθανότατα αναμενόμενης για το συγκεκριμένο

επιλεγμένο παράδειγμα) προσδίδει την χαρά της ουσίας της Μαθηματικής ανακάλυψης και όχι μόνον την χαρά της ανακάλυψης της απόδειξης προς την οποία επικεντρώνεται η διδασκαλία. Μπορούμε να ισχυριστούμε μάλιστα, ότι η ανακάλυψη της πρότασης είναι πιο σπουδαία από την ανακάλυψη της απόδειξης, η οποία και αυτή είναι σπουδαία, και ουδόλως παραγνωρίζεται η μέγιστη σημασία της στα Μαθηματικά. Απλώς, τίθεται στην μαθηματικώς ορθή της διάσταση και σειρά, δηλ. έπεται- νομοτελειακά- της ανακάλυψης (=ισχυρής υπόθεσης) την επισημοποιεί, αιτιολογεί, οριστικοποιεί, εδραιώνει, και την επισφραγίζει. Ας δούμε τι μπορεί να ανακαλυφθεί:

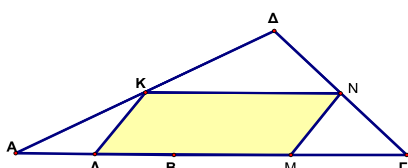
Α) Η όποια τυχαία κίνηση των πλευρών δείχνει ότι έχουμε οπτικά ένα σχήμα παραλληλογράμμου. Η πρόταση φαίνεται ως αποτέλεσμα φαινομενικά απείρων πειραμάτων, η πρόταση είναι εκεί, αποδεκτή, προφανής ίσως, ωστόσο, το «**γιατί** είναι παραλληλόγραμμο» είναι ένα ερώτημα ουσίας του επιστητού πάσης επιστήμης, που από πολλές και για πάρα πολλά ερωτήματά τους που περιέχουν το



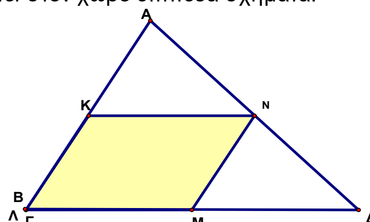
Σχήμα 1: Με την κίνηση των Α,Β,Γ,Δ, η οπτική εντύπωση του ΚΛΜΝ ως παραλληλογράμμου είνια εδραία. Η απόδειξη, είναι η λογική αναγκαότητα του «γιατί παρατηρείται» αυτό.



Σχήμα 2: Μια τέτοια διάταξη, μπορεί να ειδοθεί και ως στρεβλό τετράπλευρο, όπου ισχύει η πρόταση, αν βεβαίως ο μαθητής έχει μάθε να βλέπει στον χώρο επίπεδα σχήματα.



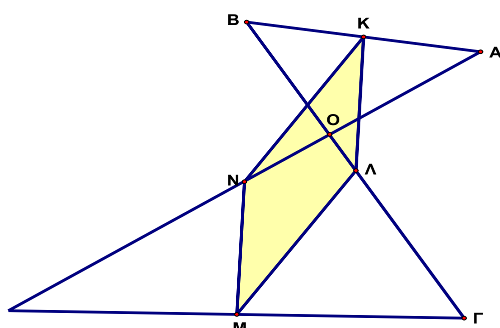
Σχήμα 3: Η ειδική περίπτωση όπου Α,Β, Γ συνευθειακά, δείχνει και εκεί την ισχύ της πρότασης, με επαναδιατύπωση για τρίγωνο.



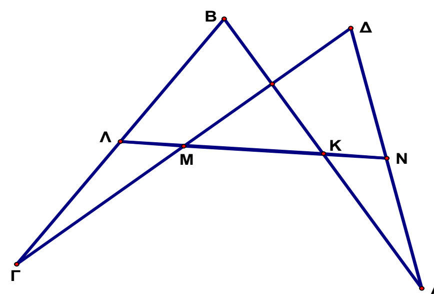
Σχήμα 4 : Η πιο απλή ειδική περίπτωση, επάγει την ιδέα της απόδειξης.

«γιατί» πλην των Μαθηματικών, μένουν αναπάντητα και ανοικτά. Για παράδειγμα, ενώ δεν γνωρίζουμε **γιατί έλκονται** δύο σώματα που έχουν μάζα, γνωρίζουμε κάλλιστα το **πώς έλκονται** (Νόμος Παγκόσμιας έλξης Νεύτωνος) Το «γιατί» είναι παραλληλόγραμμο συνιστά την απόδειξη και είναι όντως η καρδιά των Μαθηματικών, παρ᾽ ότι έχουμε την ισχυρή εποπτεία του λογισμικού. (σχήμα 1) Β) Καθώς κινούμε μια κορυφή τυχαία στο επίπεδο μπορούμε να φθάσουμε στο σχήμα 2, όπου υπάρχει μια

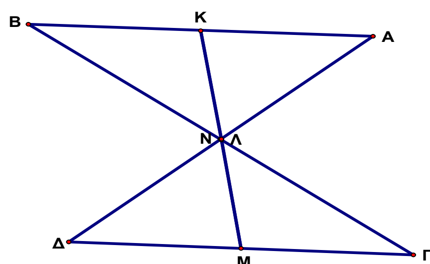
πιθανότητα ο Μαθητής να δει το σχήμα –ανάλογα με τις εμπειρίες του- ως μη κυρτό τετράπλευρο είτε ως στρεβλό τετράπλευρο στον χώρο. Αυτό μπορεί να το «δει» και από το σχήμα1, όμως η δυσκολία να φανταστεί ότι υπάρχει «κάμψη» , «τσάκισμα» κατά μήκος μιας διαγωνίου, απαιτεί γνώση της έννοιας «στρεβλό τετράπλευρο και πώς σχεδιάζεται σε επίπεδο. Το μη κυρτό το γνωρίζει, αφού στα διδακτικά βιβλία, αφού γίνει ο ορισμός του κυρτού σχήματος και του μη κυρτού, τίθεται το διδακτικό συμβόλαιο «από τώρα και στο εξής όταν θα λέμε «τετράπλευρο» θα εννοούμε μόνο το κυρτό, εκτός αν ρητώς αναφερόμεθα σε «μη κυρτό». Και αυτό το συμβόλαιο, από μόνο του, αποτελεί δυσκολία στο να αντιληφθεί το σχήμα, δεν είναι όμως και αδύνατον. Γ) Η ειδική οριακή περίπτωση όπου τα Α,Β, Γ είναι συνευθειακά, (σχήμα 3) δίνει μια καινούργια πρόταση που χρειάζεται διατύπωση και απόδειξη. Η απόδειξη μιας απλούστερης πρότασης όπως αυτή, πρέπει να υποθέσουμε ότι είναι ευκολότερη και ταυτόχρονα δίνει και την ίδια ιδέα για την απόδειξη της γενικότερης πρότασης. Μάλιστα το Β, δύναται να ευρίσκεται και στην προέκταση του ΑΓ. (Προκύπτει από περεταίρω παρατήρηση) Δ) Άλλη ειδική οριακή περίπτωση είναι όταν λ.χ. τα Β και Γ συμπίπτουν (και άρα το μέσον τους Λ) (σχήμα 4) Εδώ η απόδειξη είναι ακόμα πιο απλή και από την προηγούμενη περίπτωση και πάλι δίνει το κλειδί για την χρήση γνωστής πρότασης για την απόδειξη. Η αναδιατύπωση της πρότασης είναι πλέον «Τα μέσα των πλευρών τριγώνου με κάθε κορυφή του είναι κορυφές παραλληλογράμμου»



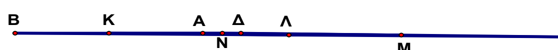
Σχήμα 7: Τα «κατά κορυφήν τρίγωνα» δίνουν μια άλλη πρόταση.



Σχήμα 5: Οριακή περίπτωση εκφυλισμού παραλληλογράαμμου σε ευθ, τμήμα, δίνει γνωστή πρόταση στο τραπέζιο.



Σχήμα 8



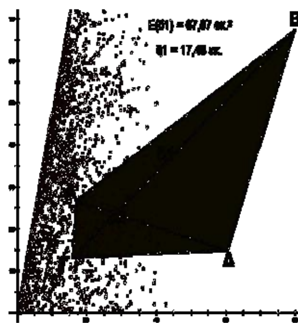
Σχήμα 6: Η οριακή περίπτωση συνευθιακών Α,Β,Γ,Δ, δίνει μια ενδιαφέρουσα γνωστή πρόταση στα ευθ. τμήματα.

Ε) Μια άλλη ειδική περίπτωση είναι πολύ πιο εντυπωσιακή: Σε κάποια στιγμή, φαίνεται το παραλληλόγραμμο να εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα. Εκεί αν ο μαθητής διερευνήσει το «πότε εκφυλίζεται το παραλληλόγραμμο σε ευθύγραμμο τμήμα» θα δει, ότι αυτό φαίνεται να συμβαίνει όταν Τα ΒΔ και ΑΓ που δεν είναι σχεδιασμένα εξ αρχής, είναι παράλληλες πλευρές τραπεζίου. Πάρα πολύ εντυπωσιακό, όταν με μεταγνωστικές αναστοχαστικές διαδικασίες, ο μαθητής μπορεί να δει μια διαφορετική πρόταση της Γεωμετρίας ως οριακή περίπτωση μιας άλλης φαινομενικά άσχετης.

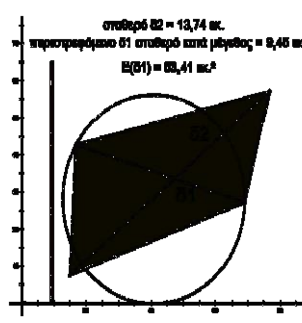
ΣΤ) Καθώς τα Α,Β,Γ,Δ γίνονται συνευθειακά, έχουμε μια άλλη επίσης γνωστή ενδιαφέρουσα περίπτωση πρότασης –άσκησης που μπορεί να λυθεί με τις στοιχειώδεις ιδιότητες των ευθ. τμημάτων ή και των διανυσμάτων. Ζ) Μια άλλη τυχαία περίπτωση διερεύνησης, μπορεί να δώσει μια άλλη πρόταση της οποίας η διατύπωση είναι *«έστωσαν δύο τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ που έχουν κατά κορυφής τις γωνίες τους* O *. Αν Κ,Λ,Μ,Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ , να δείξετε, ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.»* Η) Μια άλλη οριακή περίπτωση του ιδίου σχήματος δίνει την πρόταση που λέει, ότι «το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς μια κορυφή του, έχει ίση αντίστοιχη διάμεσο ως προς το σημείο συμμετρίας.» (σχήμα 8)

Υπάρχει μια άλλη γνωστή πρόταση που λέει ότι «το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου, ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, επί το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν» (Είναι παραπληρωματικές και έχουν ίδιο ημίτονο) Η απόδειξη της πρότασης είναι από εκείνες τις φοβερές αποδείξεις του τύπου «Φέρω, αυτό κι αυτό, παρατηρώ αυτά και απεδείχθη!» Μια γενική ευρετική οδηγία Μαθηματικών, λέει ότι «για να λύσεις μια άσκηση, θα πρέπει πρώτα να έχεις λύσει μια παρόμοια-ανάλογη ευκολότερη» Η Ευκλείδεια θεώρηση της απόδειξης λέει: «Από τις τέσσερις κορυφές του τετραπλεύρου, φέρω παραλλήλους προς την διαγώνιο , δημιουργείται ένα μεγάλο παραλληλόγραμμο και άλλα τέσσερα μικρά παραλληλόγραμμα, από τα οποία τα μισά εκάστου, συνιστούν το τετράπλευρο και άρα το τετράπλευρο έχει εμβαδόν το μισό του παραλληλογράμμου» και κάπου εκεί τελειώνει η απόδειξη. Ας δούμε πώς θα μπορούσε να το αντιμετωπίσει ένας μικρός καταρτισμένος ερευνητής, με μια ανοικτή εκφώνηση του τύπου «Να διερευνηθεί με ποιο τρόπο μπορεί να συνδέεται το μήκος των διαγωνίων τετραπλεύρου με το εμβαδόν του» : Α) Να σκεφθεί ότι ο τύπος για το εμβαδόν συναρτήσει των διαγωνίων, δεν μπορεί να είναι $\delta_1 \pm \delta_2$ αφού μήκος και μήκος κάνει

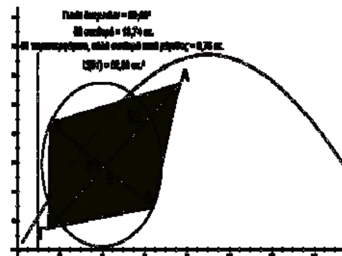
μήκος και όχι εμβαδόν, ούτε $\frac{\delta_1}{\delta_2}$, αφού μήκος δια μήκος κάνει καθαρό αδιάστατο αριθμό –λόγο κτλ Ο μαθητής μπαίνει για πρώτη φορά σε μάθημα Γεωμετρίας σε λογική ελέγχου τύπου από άποψη διαστάσεων, πράγμα που είναι στην καθημερινή λογική της Φυσικής, όχι όμως και της Γεωμετρίας. Β) Μπορεί ο μαθητής να εκτελέσει πειραματικά τον αλγόριθμο που επίσης χρησιμοποιείται καθημερινά στις πειραματικές επιστήμες, αλλά όχι στην Γεωμετρία, ότι «όταν αναζητώ σύνδεση ενός μεγέθους Α συναρτήσει άλλων, β,γ, δ,… τα διατηρώ όλα σταθερά και «κουνάω» (μεταβάλλω) μόνο το ένα το β και βλέπω την γραφική του παράσταση Α(β) . Έπειτα διατηρώ αυτό σταθερό και τα υπόλοιπα και κουνάω ένα άλλο και παρατηρώ την μεταβολή του μεγέθους Α(γ), κ.ο.κ. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, με την βοήθεια του λογισμικού sketchpad, μπορεί να μεταβάλλει την μία διαγώνιο και να βλέπει την μεταβολή του εμβαδού του τετραπλεύρου. Η μεταβολή αυτή, δίνει ως γραφική παράσταση ευθεία γραμμή, άρα βγαίνει η βάσιμη εικασία ότι ο τύπος είναι της μορφής $\alpha \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$ όπου α κάποιο αδιάστατο μέγεθος. Γ) Εφαρμόζοντας την γραφική παράσταση της μεταβολής του Εμβαδού συναρτήσει του μήκους τις μιας διαγωνίου, λαμβάνει μια εικόνα όπως φαίνεται στο Σχήμα 9. Το δ_1 αυξομειώνεται καθώς κινώ το Γ, και το εμβαδόν Ε, δίνει μια εικόνα νέφους αν κινώ ταχέως ή συνεχούς γραμμής σε βραδεία κίνηση του Γ. Υπάρχει σαφές όριο μια ευθεία και το όριο της ευθείας διαγράφεται όταν κινούμαι σε κάθετη θέση ως προς την δ_2. Εκεί ο μαθητής έχει εναλλακτικές σκέψεις, που πρέπει να είναι σε θέση να κάνει (με τις υφιστάμενες πρακτικές σε διδασκαλία, σε λογική αναλυτικών προγραμμάτων και κυρίως εμπειριών, μάλλον δεν μπορεί) Όμως θα έπρεπε



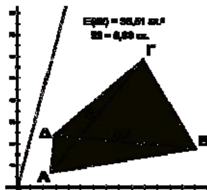
Σχήμα 9: Καθώς κινείται το και μεταβάλλεται το εμβαδόν (κίτρινο μέρος) βλέπουμε, ότι έχουμε ένα νέφος σημείων και ένα όριο μιας ευθείας.



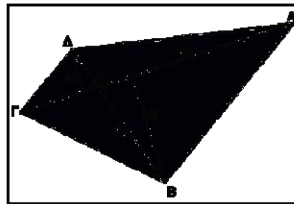
Σχήμα 10: Το δ2 είναι σταθερό "θέση μεγέθει" ενώ το δ1 μόνο μεγέθει και λαμβάνει όλες τις δυνατές θέσεις καθώς περιστρέφεται περί το Α.



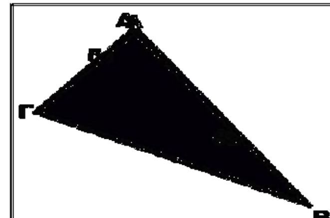
Σχήμα 11 Το Ε(φ) διαγράφει την καμπύλη, καθώς δ2=cl κατά θέση και μέγεθος ενώ δ1=cl μόνο κατά μέγεθος, καθώς το δ1 περιστρέφεται περί την τομή των διαγωνίων. Η καμπύλη διαγράφεται δύο φορές σε κάθε πλήρη στροφή του Γ.



Σχήμα 12: Το δ_2 μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος και προκύπτει γραμμική συνάρτηση



Σχήμα 13: Ο τύπος μπορεί να προκύψει από την πρόσθεση του εμβαδού δύο τριγώνων με κοινή βάση δ1 και ύψη υ1 και υ2 όπως φαίνεται και λύη τριγωνομετρία.



Σχήμα 14 Στην οριακή περίπτωση όπου Δ σχεδόν ταυτίζεται με Α, ο τύπος προκύπτει «αναρροστικά» από τον τύπο εμβαδού τριγώνου όπου το Ε ισούται με ημιγινόμενο δύο πλευρών επί ημίτονο περιεχομένης γωνίας!

να ήταν σε μαθησιακή ετοιμότητα να μπορεί να δει κάποια από τα παρακάτω, ότι δηλ. το νέφος αυτό : α) Δεν παριστάνει συνάρτηση μονότιμη, απ΄αυτές που γνωρίζει. β) ο τύπος $\alpha \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$ εξακολουθεί να ισχύει ως εικασία και το α του τύπου, είναι μεν αδιάστατο μέγεθος, αλλά όχι υποχρεωτικά σταθερό. Τα μόνα αδιάστατα μεταβλητά μεγέθη που γνωρίζει ο μαθητής είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μέγιστο στις 90^0 (κάθετη σχέση των διαγωνίων) έχουμε μόνο στο ημίτονο. Μπορεί τότε να σταθεροποιήσει τα δ_1 και δ_2 κατά μέγεθος και να δει την μεταβολή του Εμβαδού, συναρτήσει της γωνίας είτε του ημιτόνου της. Αν τυχόν εργαστεί να κατασκευάσει κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΓ , με το Γ να κινείται στον κύκλο, έχουμε το σχήμα10 . Πάλι δεν έχουμε εικόνα συνάρτησης, αλλά μεταβολής του Εμβαδού

Θ) Ως άλλες περιπτώσεις ειδικές που προκύπτουν με πιο άμεσο τρόπο, είναι η αναζήτηση για το πότε το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, πότε ρόμβος και πότε τετράγωνο είναι μια κίνηση που απορρέει από την επιτυχή απόδειξη, με κάποιο αναστοχασμό, μεταξύ μιας ελάχιστης θέσης και μιας μέγιστης που αντιστοιχεί σε κάθετη θέση των δ_1 και δ_2 , ενώ στην ελάχιστη, σε κάποια αλλοίωση του σχήματος , καθώς το σχήμα σε διάφορες θέσεις γίνεται εκτός από τετράπλευρο, τρίγωνο, δύο τρίγωνα, μη κυρτό τετράπλευρο και αντιστρόφως. Σε κάθε περίπτωση, τα δ_1 και δ_2 είναι σταθερά κατά μέγεθος και η παρουσία μιας τρίτης μεταβλητής (γωνία ή τριγωνομετρικός της αριθμός) πρέπει να μπορεί να εικασθεί τουλάχιστον από έναν μαθητή που έχει συνηθίσει να εργάζεται σε ανακαλυπτικές λογικές. Φαίνεται μια συνέχεια ανεξαρτήτως σχήματος.

Φαίνεται δηλαδή η ολότητα, που περιέχει όλα τα γενικά και ειδικά σχήματα, καθώς από την μία θέση στην άλλη υπάρχει ομαλή συνεχής διαδοχή. Αναπόφευκτα, επιβάλλεται τρόπον τινά και η διερεύνηση αυτών των περιπτώσεων, πέραν της εκφωνήσεως του προβλήματος, ας ήταν και η δεδομένη εκφώνηση «ανοικτή». Ομιλούσε μόνο για τετράπλευρο, ενώ τυχαία αλλά σίγουρα, στον δυναμικό χειρισμό εμφανίζονται όλες οι ειδικές περιπτώσεις. Αν αντί του Α ως κέντρο κύκλου , λάβει το σημείο τομή των διαγώνιων και ως φ ονομάσουμε μία γωνία των διαγωνίων δ_1 και δ_2 , τότε ως Ε(μέτροφ) λαμβάνουμε μια καμπύλη του σχήματος 12, από όπου μπορεί να προκύψει και ως εικασία ο τύπος $\mathrm{E} = \beta \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta\mu\varphi$, όπου β πλέον μια σταθερά η γραφική παράσταση της μεταβλητής (χ,ψ)=($\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta\mu\varphi$, E) δίνει ευθεία, η κλίση της οποίας είναι σταθερή 0,50 δηλ. το ½ του τύπου.

Συμπεράσματα από την διαπραγμάτευση των δύο παραδειγμάτων

Δύο απλά παραδείγματα, γεωμετρικώς «τετριμμένα», μπορούν να αποδειχθούν γόνιμα σε ανακάλυψη ειδικών περιπτώσεων μη διαφαινομένων στο στατικό σχήμα , όπως και επεκτάσεων- γενικεύσεων, επίσης μη διαφαινομένων. Ο παραγωγός είναι ο μαθητής με την εύκολη πλέον παρατήρηση που απορρέει από τις δυνατότητες του γεωμετρικού λογισμικού, που αν και φέρει τον χαρακτηρισμό «εκπαιδευτικό» για την Γεωμετρία αποτελεί ταυτοχρόνως και εξελιγμένο εργαλείο έρευνας σε έναν τομέα ο οποίος από τους Μαθηματικούς θεωρείται « σχεδόν εξαντλημένος» όπου ελάχιστα μένουν να ανακαλυφθούν. Δεν είναι ακριβές λοιπόν να θεωρούμε ότι τα γεωμετρικά δυναμικά εκπαιδευτικά λογισμικά είναι «βοηθητικά εργαλεία γεωμετρίας» όπως ο χάρακας και ο διαβήτης . Είναι κάτι πολύ παραπάνω από «εργαλεία», αφού φέρνουν στην επιφάνεια δυνατότητες, με απολύτως προσιτό τρόπο, που δεν υπήρχαν πριν δύο δεκαετίες και αποκαθιστούν το πραγματικό πρόσωπο της Γεωμετρίας που έχει εν πολλοίς στρεβλωθεί με την επί δεκάδες αιώνων διδασκαλία του τύπου «θεώρημα, πρόταση, πόρισμα, εφαρμογή, άσκηση, πρόβλημα, ανακάλυψη απόδειξης, εξεύρεση λύσης» με το σωστό πρότυπο, δηλ. «Ανακάλυψη (πραγματική ή καθοδηγούμενη) προτάσεων, ασκήσεων κτλ μέσω δημιουργίας ισχυρών εικασιών που προκύπτουν από έρευνα και πειραματισμό (πραγματικής ή καθοδηγούμενης ανακάλυψης ή επαν-ανακάλυψης) και εν συνεχεία η -με αδήριτο τρόπο- προκύπτουσα ανάγκη αιτιολόγησης, μέσω της απόδειξης. Από το μενού των γεωμετρικών λογισμικών, προκύπτει επίσης και σύνδεση με την Ανάλυση μέσω των

γραφικών παραστάσεων που μπορούν να γίνουν και άρα συμβάλλει στην ανάδειξη της ενότητας και ολιστικής θεώρησης των Μαθηματικών, κάτι αναγκαίο διδακτικά, γνωστικά, και επιστημονικά. (Πλατάρος,2008)

Στην Ελλάδα, η καθολική χρήση δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών, μοιάζει να έχει δεσμευθεί με τα προβλήματα της επιμόρφωσης Β΄επιπέδου και να τα ακολουθεί αναγκαστικώς. Ο στόχος της καθολικής χρήσης τους από μαθητές και καθηγητές με την υπάρχουσα πραγματικότητα πολιτική, κοινωνική, συνδικαλιστική, στρεβλώσεων Πανελληνίων, υποβάθμισης της διδασκαλίας της Γεωμετρίας κλπ. μοιάζει ουτοπικός, ενώ θα έπρεπε να είναι αυτονόητα επιτεύξιμος. Η όποια προσπάθεια ανάδειξης και εφαρμογής αυτών των εργαλείων, περνά μέσα από υποχρεωτική επιμόρφωση στο Β΄επίπεδο με παράλληλη τροποποίηση του Α.Π.Σ. που θα προσεγγίζει την Γεωμετρία με ακόμα πιο ανακαλυπτική-διερευνητική επιστημονική έποψη και διασύνδεσή της και με τους υπόλοιπους μαθηματικούς κλάδους και λοιπές Φυσικές Επιστήμες.

Βιβλιογραφία

Πλατάρος, Ι. & Παπαδοπούλου, Α. (2009) *«Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση με χρήση των γεωμετρικών λογισμικών»* Πρακτικά 1ου Εκπαιδευτικού Συνέδριου ένταξης και χρήσης των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας http://www.slideshare.net/plataros/ss-7062520

Πλατάρος, Ι. (2010) *«Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση»* Πρακτικά 2ου Συνέδριου Ημαθίας για τις ΤΠΕ Νάουσα-Βέροια. http://www.slideshare.net/plataros/ss-43144658

Πλατάρος, Ι. (2008) *«Η ολιστική διδασκαλία των απλών γεωμετρικών τόπων,* στα πλαίσια σύγχρονων παιδαγωγικών θεωρήσεων.» Πρακτικά 25ου Συνεδρίου ΕΜΕ στον Βόλο. http://www.slideshare.net/plataros/ss-7062607

Πλατάρος, Ι. (2008) «Τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου» . Εργασία σε αρχείο .gsp στο αποθετήριο ηλεκτρονικού υλικού για Μαθηματικούς στο πορτάλ http://b-epipedo.cti.gr

Hearsh, R. (1997) «What is Mathematics Really?»